

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

REKENAFDELING

Leiding: Prof. Dr Ir A. van Wijngaarden

TEMPERATUUR VAN GASDEELTJES IN DE HETE-LUCHTMOTOR.

Ir A.J.W. Duijvestijn.

R 211.

1 9 5 3 .

1. Inleiding.

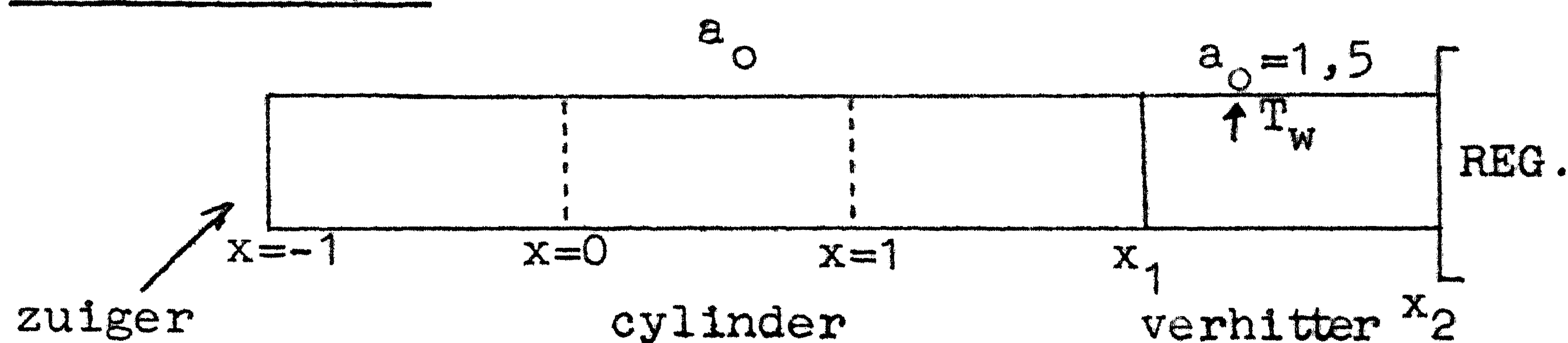
In opdracht van het Natuurkundig Laboratorium van de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken te Eindhoven, voerde de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum berekeningen uit betreffende het temperatuurverloop van gasdeeltjes in een hete luchtmotor als functie van de plaats en de tijd. Hieruit kan men de temperatuur in de doorsneden als functie van de tijd en op een bepaald tijdstip als functie van de plaats bepalen.

In het bijzonder was men geïnteresseerd in de gemiddelde temperatuur in een bepaalde doorsnede en de gemiddelde temperatuur op een bepaald tijdstip.

Er werd uitgegaan van een model met bijbehorende vergelijkingen, die aan de Rekenafdeling waren verstrekt door Dr W.F. van Schalkwijk van het Natuurkundig Laboratorium van de N.V. Philips.

De resultaten zijn reeds afgeleverd, enerzijds in de vorm van grafieken, anderzijds in de vorm van tabellen.

2. Vergelijkingen.



De temperatuur van de gasdeeltjes voldoen aan de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dT_g}{d\gamma} + a_0 \left| \cos(\gamma - \Gamma_m) \right| (T_g - T_w) = \frac{4}{7} \frac{\epsilon \sin \gamma}{1 + \epsilon \sin \gamma} T_g \quad (2.1)$$

Voor de bewegingsvergelijking geldt:

$$x = x_m + 0,9285 \sqrt{1 + \xi_m^2} \sin(\gamma - \Gamma_m). \quad (2.2)$$

$$\xi_m = 0,400 - 0,317 x_m \quad (2.3)$$

$$\sin \Gamma_m = \frac{\xi_m}{\sqrt{1 + \xi_m^2}} \quad \cos \Gamma_m = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_m^2}} \quad (2.4)$$

$$\text{Voor } T_w \text{ geldt: } T_w = 850 - 100 (x - 1,868)^2 \quad (2.5)$$

(verhitter)

$$\text{Bij } x_2 \text{ is } \overleftarrow{T_g}(\gamma_D) - \overrightarrow{T_g}(\gamma_C) = 15^\circ \text{K}. \quad (2.7)$$

Ter bepaling van de mengtemperatuur is gebruikt:

$$\frac{1}{T} \int_{-1}^{x_1} dx = \int_{-1}^{x_1} \frac{dx}{T} \quad -1 \leq x \leq 1,280 \quad (2.8)$$

Voor het begintijdstip geldt:

$$\sin \Gamma_{wk} = - \frac{\delta \xi_m + \sqrt{1 + \xi_m^2 - \delta^2}}{1 + \xi_m^2} \quad \cos \Gamma_{wk} = - \frac{\delta - \xi_m \sqrt{1 + \xi_m^2 - \delta^2}}{1 + \xi_m^2} \quad (2.9)$$

waarin ξ_m genomen is voor $x_m = x_1$.

3. Betekenis van de symbolen.

T_g = temperatuur van de gasdeeltjes in $^{\circ}\text{K}$.

γ = getransformeerde tijd in radialen

T_w = wandtemperatuur in verhitte in $^{\circ}\text{K}$.

x = plaats van een deeltje

x_m = gemiddelde plaats van een deeltje

a_o = overdrachtscoëfficiënt

$\varepsilon = 0,17$

$\delta = 0,294$.

Γ_{kw} en Γ_{wk} = tijdstippen waarop de deeltjes een minimale x bezitten.

$\overrightarrow{T_g}(\gamma_C)$ = temperatuur als de deeltjes in de regenerator komen

$\overleftarrow{T_g}(\gamma_D)$ = temperatuur als de deeltjes uit de regenerator komen.

$\overline{T}$ = mengtemperatuur in $^{\circ}\text{K}$.

4. Algemeen overzicht:

Uit (2.9) wordt Γ_{wk} bepaald. Alle berekeningen worden uitgevoerd voor waarden van γ liggend in het interval

$$\Gamma_{wk} \leq \gamma \leq \Gamma_{wk} + 2\pi.$$

Men karakteriseert de deeltjes door hun x_m waarden en kiest 10 aequidistante x_m waarden in cylinder en verhitte.

Er zijn verschillende soorten deeltjes:

Categorie 1: Deeltjes die slechts in de cylinder komen

2: Deeltjes die in de cylinder en verhitte maar niet in de regenerator komen.

3: Deeltjes die de cylinder, verhitte en de regenerator bereiken.

4: Deeltjes die niet in de cylinder doch wel in de verhitte en de regenerator komen.

Het zal duidelijk zijn dat deze gevallen onderscheiden moeten worden, daar in de cylinder een andere differentiaalvergelijking geldt als in de verhitte. Dit zal aanleiding geven tot een aantal discontinuïteiten in de functie $T_g(\gamma, x)$.

5. Gang van de berekening.

Er zal nu in het bijzonder een deeltje beschouwd worden uit categorie 3.

A. Deeltje bevindt zich in de cylinder:

Er geldt dan de differentiaalvergelijking met $a_0 = 0$.

$$\frac{dT_g}{d\gamma} = \frac{4}{7} \frac{\varepsilon \sin \gamma}{1 + \varepsilon \cos \gamma} T_g.$$

Deze vergelijking is direct te integreren en levert:

$$T_{g_2} - T_{g_1} = \left(\frac{1 + \varepsilon \cos \gamma_1}{1 + \varepsilon \cos \gamma_2} \right)^{\frac{4}{7}} \quad (5.1)$$

T_{g_1} = temp. op het tijdstip $\gamma = \gamma_1$

T_{g_2} = temp. op het tijdstip $\gamma = \gamma_2$

Men geeft nu op het tijdstip $\gamma = \Gamma_{wk}$ elk deeltje wat zich in de cylinder bevindt een temperatuur $\bar{T}_0$.

Met behulp van (5.1) is nu $T_g(\gamma_B)$ te berekenen, immers:

$$T_g(\gamma_B) - T_g(\Gamma_{wk}) = \left(\frac{1 + \varepsilon \cos \Gamma_{wk}}{1 + \varepsilon \cos \gamma_B} \right)^{\frac{4}{7}}.$$

Hierin is γ_B de kleinste waarde van γ in $\Gamma_{wk} \leq \gamma \leq \Gamma_{wk} + 2\pi$ waarop het deeltje zich in de doorsnede $x = x_1$ bevindt. De waarde γ_B is te bepalen uit de vergelijkingen (2.2) t/m (2.4) door $x = x_1$ te substitueren.

Voorts wordt nog de volgende notatie ingevoerd:

$\gamma = \gamma_C$. Het tijdstip waarop het deeltje zich voor de eerste maal in $\Gamma_{wk} \leq \gamma \leq \Gamma_{wk} + 2\pi$ de doorsnede $x = x_2$ bereikt.

$\gamma = \gamma_D$ Het tijdstip waarop het deeltje voor de tweede maal door de doorsnede $x = x_2$ komt.

$\gamma = \gamma_E$ Het tijdstip waarop het deeltje voor de tweede maal in de doorsnede $x = x_1$ is.

B. Deeltje in de verhitte:

In de verhitte geldt de vergelijking (2.1) waarbij $a_0 = 1,5$. Op het tijdstip $\gamma = \gamma_B$ is $T_g(\gamma_B)$ bekend, waardoor eveneens uit (2.1) alle afgeleiden van T_g op $\gamma = \gamma_B$ te bepalen zijn.

Met behulp van de Taylor ontwikkeling

$$T_g(\gamma) = T_g(\gamma_B) + (\gamma - \gamma_B) T_g'(\gamma_B) + (\gamma - \gamma_B)^2 T_g''(\gamma_B) / 2! \dots$$

zijn punten in de buurt van $\gamma = \gamma_B$ te berekenen. Hierdoor is de "start" bekend geworden en men kan de numerieke integratiemethode volgens Adams (1) aanwenden om de T_g waarden in het interval $\gamma_B \leq \gamma \leq \gamma_C$ te bepalen.

C. Deeltje in de regenerator:

Als het deeltje in de regenerator geweest is geldt:

$$\vec{T}_g(\gamma_D) - \vec{T}_g(\gamma_C) = 15^\circ \text{K}.$$

Op dezelfde wijze als in B is weer de Taylorreeks in $\gamma = \gamma_D$ op te schrijven:

$$T_g(\gamma_D) = T_g(\gamma_D) + (\gamma - \gamma_D) T_g'(\gamma_D) + (\gamma - \gamma_D)^2 T_g''(\gamma_D) / 2! \dots$$

Daarna kan weer de numerieke integratie begonnen worden. Dit gaat zo

door totdat het deeltje de doorsnede x_1 heeft bereikt op $\gamma = \gamma_E$. Na $\gamma = \gamma_E$ geldt weer formule (4.1) en is $T_g(\gamma_{wk} + 2\pi)$ te bepalen.

D. Mengen.

Nadat $T_g(\gamma_{wk} + 2\pi)$ is bepaald kunnen de deeltjes die zich in de cylinder bevinden op $\gamma_{wk} + 2\pi$ gemengd worden. Er wordt zodanig gemengd, dat alle deeltjes na menging dezelfde temperatuur bezitten, terwijl de totale warmteinhoud gelijk blijft.

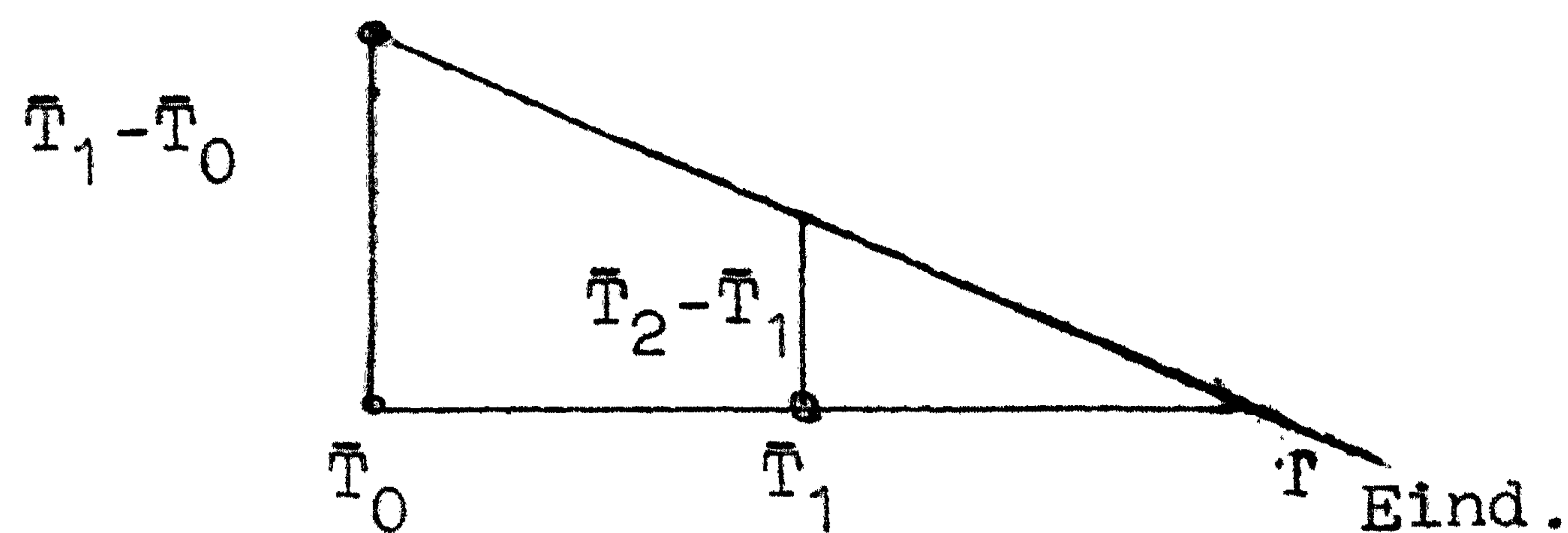
Dit gebeurt met behulp van (2.8)

$$\frac{1}{\bar{T}_1} \int_{-1}^{x_1} dx = \int_{-1}^{x_1} \frac{dx}{T}$$

Het is duidelijk dat deeltjes uit categorie

- 4: slechts voldoen aan vergelijking (5.1)
- 2: zowel met (5.1) als met (2.1) (a_0 bepaalde waarde) te maken hebben
- 3: voldoen aan (5.1), (2.1) en aan (2.7)
- 4: voldoen aan (2.1) en aan (2.7).

Met de nieuwe mengtemperatuur $\bar{T}_1$ is dus een cyclus voltooid. Met deze $\bar{T}_1$ kan weer een nieuwe cyclus berekend worden. Dit wordt zoveel maal herhaald totdat de mengtemperatuur constant is geworden. Hier kwam aan het licht dat de afname van de mengtemperatuur als functie van de mengtemperatuur lineair verliep.

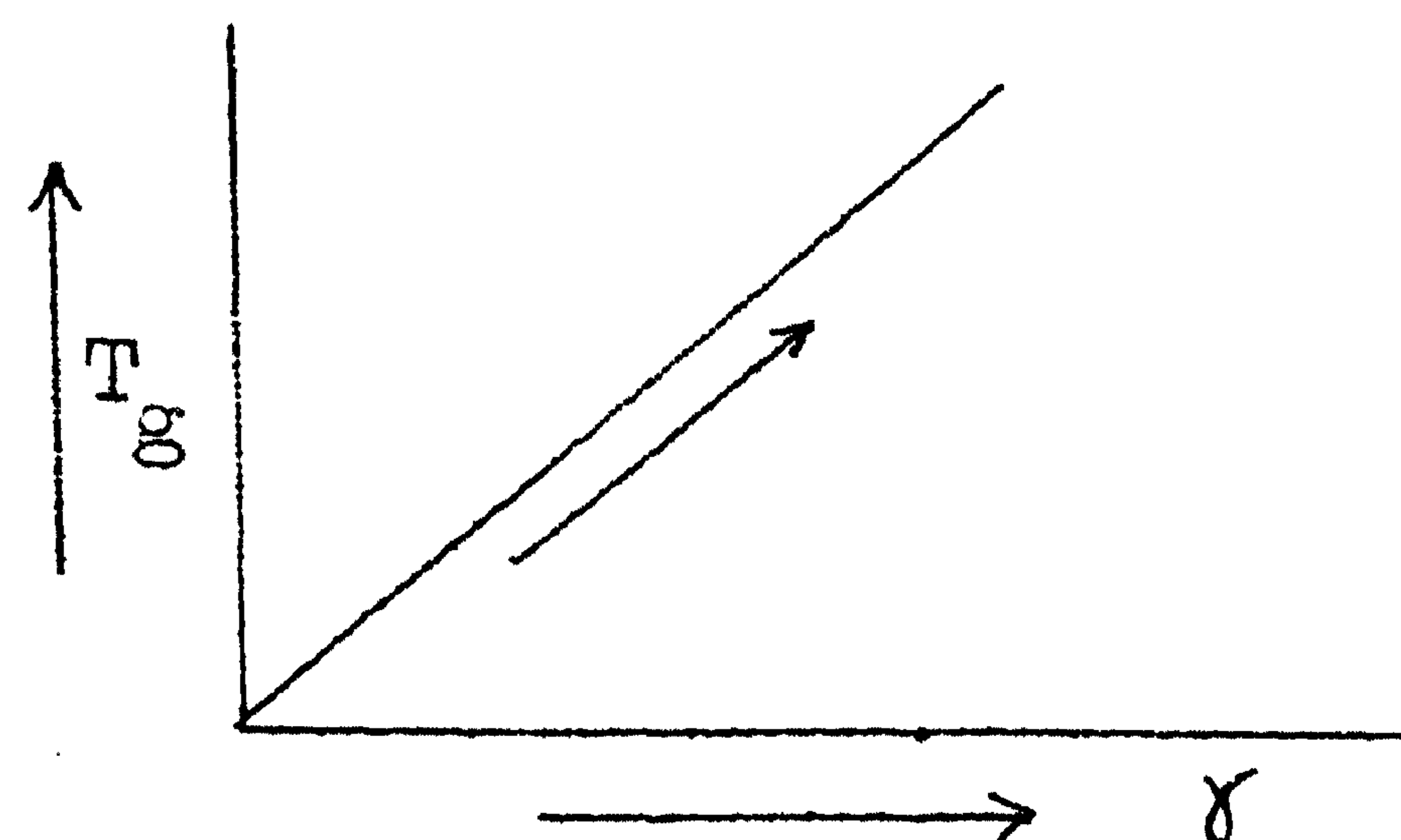


Op deze wijze is het dus mogelijk geworden om door berekening van $\bar{T}_1$ en $\bar{T}_2$ de uiteindelijke mengtemperatuur te bepalen door lineaire extrapolatie, zodat derhalve nog slechts een cyclus doorgerekend behoeft te worden, die men als controle kan gebruiken.

Door dit procédé is dus de temperatuur van elk deeltje als functie van γ bekend geworden. Door interpolatie kan T_g bepaald worden op elk tijdstip en in elke doorsnede. Deze interpolatie is echter te ontlopen door bij de aanvankelijke berekening het γ interval aequidistant te kiezen en de temperaturen in de doorsneden door middel van stroken in een tekening te bepalen.

Ten einde dit bevredigend te kunnen uitvoeren werd een tekening gemaakt op drie assen. Hierin worden voor een aantal doorsneden T_g tegen γ uitgezet. Het assenstelsel wordt voor elke doorsnede langs een zekere lijn in het $T_g - \gamma$ vlak verschoven. De keuze van de stand van deze lijn wordt hoofdzakelijk beïnvloed door de duidelijkheid van de tekening:

De situatie is dus als volgt:



Op deze wijze kunnen de T_g waarden met aequidistante γ in tekening gebracht worden, waardoor constante γ lijnen bekend geworden zijn. Bovendien kan men nu de constante x lijnen inbrengen en het geheel strokend maken.

Bijzondere deeltjes en punten:

Het oppervlak $T_g(\gamma, x)$ verloopt niet continu als functie van γ en x . Het is derhalve van belang de discontinuïteiten- en kniklijnen te bepalen.

Knikken.

A: lijnen van constante γ :

Elk deeltje wat de doorsnede $x=x_1$ passeert, dus van de cylinder in de verhitte komt, ondervindt een plotselinge verandering van de temperatuur van de omgeving. Het gevolg hiervan is een discontinuïteit in de eerste afgeleide van de temperatuur. De functie zelf is continu. De eerste kniklijn is derhalve de lijn $x=x_1$.

De tweede kniklijn wordt veroorzaakt door het feit, dat niet alle deeltjes de verhitte bereiken. Stel dat het laatste deeltje wat de verhitte bereikt een gemiddelde baan $x_{m_{kn}}$ heeft. Dit deeltje heeft als rechteromkeerpunt $x=x_1$, zodat de $x_{m_{kn}}$ is te bepalen uit de formules (2,2) tot (2.4). In het rechteromkeerpunt is $\sin(\gamma - \Gamma_m) = 1$.

Deeltjes met een x_m waarde kleiner dan $x_{m_{kn}}$ behouden steeds de cylindertemperatuur, terwijl deeltjes met een x_m waarde groter dan $x_{m_{kn}}$ gedurende een zekere tijd de invloed van de verhitte ondervinden. De tweede kniklijn is dus de lijn $x_{m_{kn}}$. De knik zal dus in de tijd meegevoerd worden.

B: lijnen van constante x :

Hier zal men slechts een knik vinden t.g.v. het deeltje $x_{m_{kn}}$.

Discontinuïteiten:

Hierbij heeft men geen verschil te maken tussen constante x en y lijnen, daar de discontinuïteitenlijnen niet hiermee samenvallen. Allereerst wordt een discontinuïteit veroorzaakt door het laatste deeltje wat niet meer in de regenerator komt. Dit deeltje wordt aangeduid met $x_{\text{disc.1}}$ en is bepaald doordat zijn rechteromkeerpunt gelijk is aan $x=x_2$. Men kan het deeltje de verhittertemperatuur laten behouden of de temperatuursdaling in de regenerator laten meemaken. Op deze wijze is de discontinuïteitenlijn voor $x_{\text{m disc.1}}$ vastgelegd.

De tweede discontinuïteit ontstaat doordat niet alle deeltjes deelnemen aan de mengtemperatuur. Het eerste deeltje wat niet meer aan de menging meedoet, is $x_{\text{m disc.2}}$. Dit is gekarakteriseerd doordat het linkeromkeerpunt $x=x_1$ wordt. Ook hier zijn weer de discontinuïteitenlijnen te bepalen door het deeltje al of niet aan het mengen te laten deelnemen.

B. Op constante x lijnen: Geldt hetzelfde als in A.

Singulariteiten.

Voor grote x_m waarden zullen de deeltjes slechts zeer kort in de verhitte verblijven, terwijl de temperatuurdaling in de regenerator steeds 15° is. Het blijkt dat vanaf een zekere x_m de verwarming in de verhitte niet toereikend is om de temperatuurdaling in de regenerator op te heffen. De deeltjes zullen derhalve temperaturen krijgen, die naar $-\infty$ streven. .

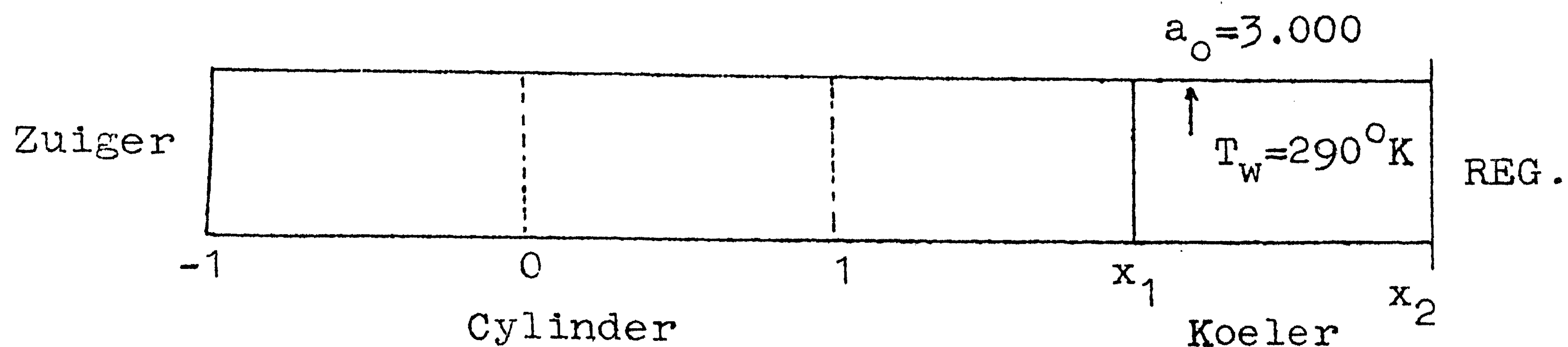
Dit gedeelte is later in de tekening bijgestrookt op aanwijzing van Dr W.F. van Schalkwijk.

Bepaling gemiddelde temperaturen:

Daar de temperaturen op constante γ en x lijnen bekend waren, konden de integralen $\frac{1}{\gamma} \int T_g d\gamma$ en $\frac{1}{x} \int T_g dx$ eenvoudig bepaald worden.

KOELER.

In de koeler wordt hetzelfde procedé gebruikt, alleen met andere vergelijkingen.



De vergelijkingen zijn hier:

$$\frac{dT_g}{d\gamma} + a_o \left| \cos(\gamma - \Gamma_m) \right| (T_g - T_w) = \frac{4.4}{7} \frac{\epsilon \sin \gamma}{1 + \epsilon \cos \gamma} T_g. \quad (1a)$$

$$x = x_m - 0,3714 \sqrt{1 + \xi_m^2} \sin(\gamma - \Gamma_m) \quad (2a)$$

$$\xi_m = -2,500 + 0,792 x_m \quad (3a)$$

$$\sin \Gamma_m = \frac{\xi_m}{\sqrt{1 + \xi_m^2}} \quad \cos \Gamma_m = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_m^2}} \quad (4a)$$

$$\text{Bij } x_2 \text{ geldt: } \vec{T}_g(\gamma_C) - \vec{T}_g(\gamma_D) = 15^\circ\text{K}. \quad (5a)$$

$$\sin \Gamma_{wk} = \frac{-\delta \xi_m + \sqrt{1 + \xi_m^2 - \delta^2}}{1 + \xi_m^2} \quad (6a)$$

$$\cos \Gamma_{wk} = - \frac{\delta + \xi_m \sqrt{1 + \xi_m^2 - \delta^2}}{1 + \xi_m^2}$$

ξ_m te nemen voor $x_m = x_1$.

Gewijzigde berekening voor koeler en verhitter.

Verhitter:

In de gebruikte vergelijkingen van de vroeger besproken methoden zijn enkele vereenvoudigingen aangebracht.

In de differentiaalvergelijking van de gasdeeltjes die zich in de verhitter bevinden gold:

$$\frac{dT_g}{d\gamma} + a_o \left| \cos(\gamma - \Gamma_m) \right| (T_g - T_w) = \frac{4}{7} \frac{\epsilon \sin \gamma}{1 + \cos \gamma} T_g.$$

Men vervangt hierin $a_o \left| \cos(\gamma - \Gamma_m) \right|$ door $a_o \frac{2}{\pi} = a$, en neemt de T in het rechterlid constant $= \bar{T}_g = 800^\circ \text{ K.}$; vervolgens wordt $T_w = 840 \text{ K.}$ gekozen. De differentiaalvergelijking wordt derhalve:

$$\frac{dT_g}{d\gamma} + a (T_g - T_w) = \frac{4}{7} \frac{\epsilon \sin \gamma}{1 + \cos \gamma} \bar{T}_g \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} \text{met } T_g &= 800^\circ \text{ K.} \\ T_w &= 840^\circ \text{ K.} \end{aligned}$$

Er is dezelfde methode gevolgd als in het niet vereenvoudigde geval met dit verschil dat de numerieke integratie is vervangen door een andere methode.

Men ontwikkelt $\frac{\varepsilon \sin \gamma}{1 + \cos \gamma}$ in een Fourierreeks en vindt

$$\frac{\varepsilon \sin \gamma}{1 + \cos \gamma} = 2 \lambda (\sin \gamma - \lambda \sin 2 \gamma + \lambda^2 \sin 3 \gamma - \lambda^3 \sin 4 \gamma \dots)$$

waarin $\lambda = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ met $\varepsilon = 0,17$ dus $\lambda = 8,56 \cdot 10^{-2}$.

Men verwaarloost nu termen met λ^4 en hoger.

De differentiaalvergelijking laat zich nu eenvoudig oplossen met de methode van de variatie van de constanten.

De oplossing luidt:

$$\begin{aligned} T_g(\gamma) = & T_g(\gamma_B) e^{-a(\gamma - \gamma_B)} - T_w \left\{ e^{-a(\gamma - \gamma_B)} - 1 \right\} + \frac{8}{7} \bar{T}_g \cdot \lambda \cdot f(\gamma) - \\ & - \frac{8}{7} \bar{T}_g \cdot \lambda e^{-a(\gamma - \gamma_B)} f(\gamma_B) \\ f(\gamma) = & \frac{a}{a^2 + 1} \sin \gamma - \frac{a \lambda \sin 2 \gamma}{a^2 + 4} + \frac{a \lambda^2 \sin 3 \gamma}{a^2 + 9} - \frac{a \lambda^3 \sin 4 \gamma}{a^2 + 16} \dots \\ & - \frac{1}{a^2 + 1} \cos \gamma + \frac{2 \lambda}{a^2 + 4} \cos 2 \gamma - \frac{3 \lambda^2}{a^2 + 9} \cos 3 \gamma + \frac{4 \lambda^3}{a^2 + 16} \cos 4 \gamma \dots \end{aligned} \quad (2b)$$

Met behulp van (1) kan men voor elk deeltje de temperatuur in de verhitter bepalen.

Koeler:

In de koeler geldt weer vergelijking (2), echter met $T_w = 280^\circ\text{K}$ en $T_g = 300^\circ\text{K}$, terwijl in het rechterlid de factor $\frac{4}{\gamma}$ is vervangen door $\frac{4.4}{\gamma}$, zodat de differentiaalvergelijking wordt:

$$\frac{dT_g}{d\gamma} + a (T_g - T_w) = \frac{4.4}{\gamma} \frac{\epsilon \sin \gamma}{1 + \cos \gamma} \cdot T_g \quad (3b)$$
$$T_w = 280^\circ\text{K}.$$
$$T_g = 300^\circ\text{K}.$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking wordt derhalve:

$$T_g(\gamma) = T_g(\gamma_B) e^{-a(\gamma - \gamma_B)} - T_w \left\{ e^{-a(\gamma - \gamma_B)} - 1 \right\} + \frac{8.8}{\gamma} T_g \lambda f(\gamma) - \frac{8.8}{\gamma} \lambda T_g f(\gamma_B) \quad (4b)$$

waarin voor $f(\gamma)$ dezelfde definitie als boven is gebruikt.

Literatuur:

1. Numerical Mathematical Analysis: J.B. Scarborough, blz.267.